Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет»

Кафедра физики

ФИЗИКА

Методические указания по выполнению контрольной работы № 4
для студентов заочной формы обучения
по курсу общей физики для всех специальностей

Составители Т. А. Балашова
Н. Н. Демидова
Т. В. Лавряшина

Утверждены на заседании кафедры
Протокол № 3 от 07.11.2007

Рекомендованы к печати
учебно-методической комиссией
направления 130404
Протокол № 8 от 28.11.2007

Электронная копия находится
в библиотеке главного корпуса
ГУ КузГТУ

Кемерово 2007

Данные методические указания являются комментарием к учебному пособию «Физика. Программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических и технологических специальностей вузов» под ред. В. Ф. Дмитриевой [1].

Перед выполнением контрольной работы необходимо ознакомиться с общими методическими указаниями [1, с. 7–11]. Не приступайте к решению задач, не проработав теоретический материал на соответствующую тему. Решение задач раздела «Квантовая физика» ставит перед студентами–заочниками обязательное условие разобраться с непростыми понятиями квантовой механики и физики конденсированного состояния. Необходимые для защиты контрольной работы определения, понятия и законы выделены *курсивом*.

Контрольная работа № 4

В задачах данной контрольной работы обсуждаются элементы квантовой механики, основные положения теории атома и ядра, физики твердого тела.

<u>Задачи 1–10</u> на тему «Волновые свойства микрочастиц. Гипотеза де Бройля».

Корпускулярно-волновой дуализм волн и частиц – фундаментальный закон природы. Закон, сформулированный Луи де Бройлем (1924 г.) состоит в том, что любой микроскопический объект обладает как свойствами частицы, так и свойствами волнового поля. Энергия ε микрообъекта пропорциональна частоте ν его волны

$$\varepsilon = h\nu,$$

а импульс $\vec{p}$ пропорционален волновому вектору $\vec{k}$:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k},$$

где $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Для плоской монохроматической волны связь модуля волнового вектора k с длиной волны λ имеет вид

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Следовательно, частице массой m, движущейся со скоростью v, соответствует длина волны λ:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Связь между кинетической энергией T частицы и ее импульсом p зависит от скорости этой частицы (см. контрольную работу № 3) [1]. Так, для классической частицы (задачи 8, 9), движущейся со скоростью $v \ll c$ (c – скорость электромагнитной волны в вакууме), кинетическая энергия T и импульс p связаны соотношением

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

а для релятивистской частицы (задачи 4–7, 10), движущейся со скоростью $v \sim c$, указанная связь имеет вид

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2E_0)}, \tag{1}$$

где E_0 – энергия покоя релятивистской частицы.

Примечания:

1. Перед решением задач, в которых описывается движение релятивистских частиц, разберите пример 1 [1, с. 99].
2. В задачах 1–3 используется понятие «комптоновская длина волны частицы» (см. контрольную работу № 3) [1].

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c},$$

где m_0 – масса покоя частицы [1, с. 122, табл. 16]; $m_0 c = p$ – комптоновский импульс частицы. Частицы с такой длиной волны являются релятивистскими. Для них используйте формулу (1), из которой

$$(pc)^2 = T^2 + 2E_0 T$$

(задачи 1–4, 10), и формулу, связывающую кинетическую энергию T и скорость v частицы,

$$T = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right),$$

или формулу для релятивистской массы m частицы (задачи 3,6)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

3. Электрон (заряд электрона $|e|$ = 1,6·10^{-19} Кл), прошедший в электростатическом поле ускоряющую разность потенциалов U (задача 7), приобретает кинетическую энергию, равную работе сил ускоряющего поля:

$$T = eU.$$

4. Энергия теплового нейтрона (задача 8) рассчитывается по формуле $E = \frac{3}{2}kT$, где k = 1,38·10^{-23} $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.
5. Решая задачу 9, учтите, что 1 эВ = 1,6·10^{-19} Дж.

Задачи 11–20 на тему «Соотношение неопределенностей Гейзенберга».

В классической механике любая частица движется по определенной траектории, так что в каждый момент времени ее координаты (x, y, z) и проекции импульса (p_x, p_y, p_z) точно определены. Движение микрочастиц из-за наличия у них волновых свойств существенно отличается от движения классических частиц. В этом случае нельзя говорить об определенной траектории, а следовательно, неправомерно говорить и об одновременно точных значениях ее координат (x, y, z) и проекций импульса (p_x, p_y, p_z) на координатные оси.

Учитывая волновые свойства частиц, В. Гейзенберг установил *соотношение неопределенностей*, согласно которому произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше $\frac{h}{2\pi}$:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{h}{2\pi}. \qquad (2)$$

Из соотношения неопределенностей следует, что для частицы с точным значением, например, координаты x ($\Delta x = 0$), соответствующая проекция ее импульса будет совершенно неопределенной ($\Delta p_x = \infty$).

Примечания:

1. Приступая к решению задач данной темы, разберите пример 2 [1, с. 100].
2. Перед решением задачи 11 выясните понятие «бесконечно глубокая одномерная потенциальная яма» (см. с. 6 данных методических указаний) и примите неопределенность координаты электрона равной, например, ширине потенциальной ямы $\Delta x \approx \ell$.
3. В задаче 12 кроме соотношения (2) необходимо использовать выражение для максимального значения кинетической энергии осциллятора, совершающего гармонические колебания

   $$W_K^{\max} = \frac{m x_m^2 \omega^2}{2} = \frac{m x_m^2 4\pi^2 \nu^2}{2}.$$

   Принимая неопределенность координаты $\Delta x \approx x_m$, а неопределенность проекции импульса на координатную ось $\Delta p_x \approx p_x$ и используя связь импульса и кинетической энергии, можно определить минимальное значение энергии гармонического осциллятора.
4. Минимальную неопределенность Δv скорости электрона в атоме водорода (задача 13) найдите, принимая $\Delta x \approx r$ (так как погрешность в определении координаты Δx не может быть больше среднего расстояния электрона от ядра), а неопределенность импульса

   $$\Delta p \approx m \Delta v,$$

где m – масса электрона. Тогда неопределенность Δv скорости при использовании соотношения (2) равна

$$\Delta v = \frac{h}{2\pi mr}. \quad (3)$$

5. Чтобы показать, может ли электрон находиться в ядре (задача 14), нужно рассчитать погрешность определения скорости электрона, используя формулу (3), где r – радиус ядра. Если окажется, что Δv больше скорости света, то электрона в ядре быть не может.
6. Минимальная неопределенность Δx координаты (задачи 15, 16) рассчитывается, если принять $\Delta v_x = v_x$, которая не может быть больше скорости света c, поэтому

$$\Delta x_{\min} = \frac{h}{2\pi mc}.$$

7. Согласно условию задачи 16 протон является релятивистской частицей, импульс которой рассчитывается по формуле (1). Кинетическая энергия частицы в данном случае равна ее энергии покоя E_0 ($T = E_0$). Неопределенность импульса Δp_x берется равной проекции p_x импульса частицы.
8. В задаче 17 неопределенность проекции Δp_x импульса фотона на ось X примите, например, равной значению проекции его импульса на указанную ось $\Delta p_x \approx p_x = h/\lambda$.
9. При решении задач 19–20 разберите пример 3 [1, с. 100–101], примените соотношение неопределенностей для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi},$$

где ΔE – неопределенность энергии частицы в некотором состоянии; Δt – неопределенность времени, которая равна времени нахождения частицы в этом состоянии.

Задачи 21–30 на тему «Уравнение Шредингера. Движение частиц в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме».

Уравнение Э. Шредингера (1926 г.) – основное уравнение нерелятивистской квантовой механики – описывает движение микрочастиц в силовых полях, учитывая их волновые свойства.

Общее (зависящее от времени) *уравнение Шредингера* для частиц массой m, движущихся со скоростями $v \ll c$, имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

где $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $\Delta\Psi = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа для волновой Ψ-функции, зависящей от координат и времени; $U(x,y,z,t)$ – потенциальная функция частицы в силовом поле; i – мнимая единица.

Волновая Ψ-функция должна удовлетворять следующим условиям: 1) быть конечной, однозначной и непрерывной; 2) иметь непрерывные производные по координатам и времени; 3) удовлетворять *условию нормировки:*

$$\int_V |\Psi|^2 dV = 1.$$

Если значения энергии частицы фиксированы (стационарные состояния), то $U(x,y,z)$ не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии. Тогда *уравнение Шредингера для стационарных состояний* примет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0, \qquad (4)$$

где E – полная энергия частицы в силовом поле; $(E–U)$ – ее кинетическая энергия.

Из множества решений уравнения (4) физический смысл имеют только решения при определенных граничных условиях. В этом случае ψ-функции называют *собственными функциями*, а значения энергии E называют *собственными значениями*.

Для частицы, движущейся вдоль оси X в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме (рис. 1) шириной L, потенциальная энергия которой $U(x) = \infty$ при $0 > x > L$ и $U(x) = 0$ при $0 \le x \le L$, уравнение Шредингера запишется в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0. \qquad (5)$$

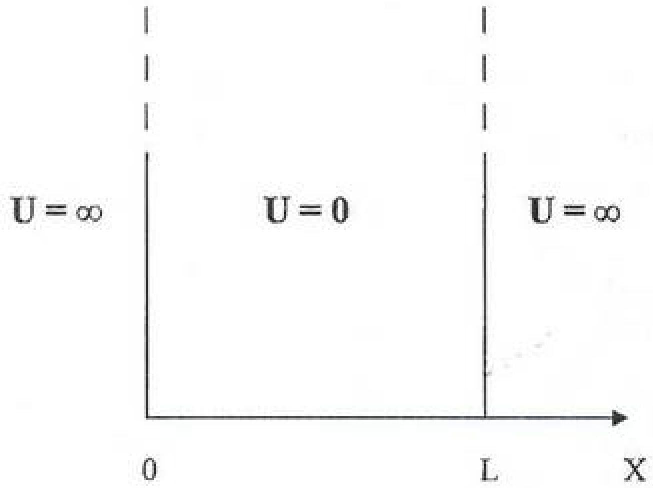

Рис. 1

Так как частица по условию задачи за пределами ямы находиться не может, то на границах ямы непрерывная ψ-функция обращается в ноль

$$\psi(0) = \psi(L) = 0.$$

Решая однородное дифференциальное уравнение (5) второго порядка, обозначим $\frac{2m}{\hbar^2} E = k^2$, тогда общим его решением будет функция вида

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Используя граничные условия, согласно которым непрерывная ψ-функция на границе ямы обращается в ноль, получим выражение

$$\psi(x) = A \sin kx,$$

которое будет выполняться только при $k = n\pi/L$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Собственные значения энергии E_n (уровни энергии) частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2,$$

где n – *главное квантовое число.* Из этого уравнения видно, что минимальную энергию E_{min} частица имеет при значении квантового числа $n = 1$ (задача 23), а изменение энергии ΔE при переходе частицы с одного энергетического уровня на другой (задачи 21, 22)

$$\Delta E = E_n - E_k,$$

где E_n и E_k – значения энергии частицы на соответствующем энергетическом уровне. Разность энергий соседних энергетических уровней (задача 24) зависит от массы m частицы, ширины ямы L и квантового числа n

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \left[(n+1)^2 - n^2 \right] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (2n+1).$$

Если n достаточно велико, то

$$\Delta E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m\ell^2} n.$$

Собственные ψ_n-функции для данной частицы примут вид

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

где $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ определяется из *условия нормировки* ψ_n*-функции*

$$\int_0^L |\psi_n|^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx = 1.$$

Тогда, зная вид собственной ψ_n-функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

можно определить вероятность нахождения частицы в соответствующей области пространства. В случае одномерного движения частицы *вероятность dW обнаружить частицу в интервале от x до $x+dx$* выражается формулой

$$dW = \left|\psi_n(x)\right|^2 dx,$$

где $\left|\psi_n(x)\right|^2$ – плотность вероятности (задачи 25–27).

Вероятность W обнаружить частицу в интервале от x_1 до x_2 (задачи 28–30) находится интегрированием dW в указанных пределах

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx.$$

На рис. 2 приведены зависимости плотности вероятности $\left|\psi_n(x)\right|^2$ обнаружения частицы на различных расстояниях от стенок ямы для квантовых состояний частицы с энергиями E_1, E_2 и E_3.

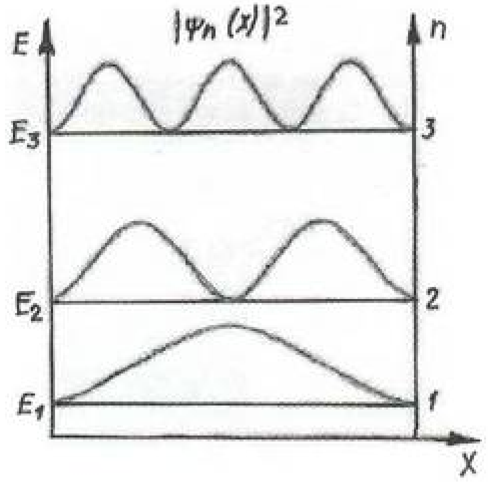

Рис. 2

Пример 1. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L в основном состоянии (n = 1). Вычислить вероятность W того, что электрон будет обнаружен в средней трети потенциальной ямы.

$n = 1$ $(1/3)L \le x \le (2/3)L$ W – ?	Решение. Вероятность W обнаружить электрон в интервале $x_1 \le x \le x_2$ определяется урав-

нением

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx, \qquad (6)$$

где $\psi_n(x)$ – нормированная собственная волновая функция имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x. \qquad (7)$$

Квадрат модуля этой функции определяет плотность вероятности обнаружения частицы в указанном интервале. Подставив (7) в (6), получим

$$W = \frac{2}{L} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

Для вычисления данного интеграла произведем замену:

$$\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L}\right)$$

и для значений $x_1 = L/3$ и $x_2 = 2L/3$ рассчитаем вероятность

$$W = \frac{1}{L}\left[\int_{L/3}^{2L/3} dx - \int_{L/3}^{2L/3} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx\right] = 0{,}61.$$

Следовательно, вероятность обнаружить электрон, находящийся в основном состоянии, в средней трети потенциального ящика равна 61 %.

Примечания:

1. Масса частиц (задачи 21–24) приведена в [1, с. 122, табл. 16].
2. Энергия, излучаемая при переходе частицы с одного энергетического уровня на другой (задачи 21, 22) связана с длиной волны λ известным соотношением

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}.$$

3. В условии задачи 24 ширину потенциальной ямы принять равной 0,1 нм, а среднюю энергию теплового движения атома определить по формуле

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT .$$

4. Перед решением задач 25–27 разберите пример 4 [1, с. 101–102].
5. Точки, в которых плотность вероятности принимает минимальное или максимальное значения (задача 27), выбираются путем вариации x (0, $L/4$, $L/2$, $3L/4$, L) для функции

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} .$$

6. Основное (невозбужденное) состояние частицы с энергией E_1 определяет квантовое число $n = 1$ (задачи 25, 26).
7. Решение задач 27–30 не вызовет затруднения, если разобрать пример 1 данных методических указаний.

<u>Задачи 31–40</u> на тему «Постулаты Бора и оптические спектры. Рентгеновские лучи».

Для объяснения оптических спектров атомов Н. Бор предложил теорию, в основу которой были положены два постулата.

1. Электроны в атоме движутся по круговым стационарным орбитам, при этом атом не излучает и не поглощает энергию. *Условием стационарности электронных орбит является квантование момента импульса электрона*

$$m v_n r_n = n \frac{h}{2\pi} , \tag{8}$$

где m – масса электрона; v_n – его скорость на n-ой электронной орбите радиуса r_n; h – постоянная Планка.

2. *Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта энергией $h\nu$ при переходе атома из одного стационарного состояния в другое*. Величина кванта равна разности энергий тех стационарных состояний атома, между которыми совершается переход:

$$h\nu = E_n - E_k .$$

На электрон в атоме со стороны положительно заряженного ядра действует кулоновская сила

$$F_k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n{}^2},$$

где Z – порядковый номер элемента: для атома водорода (задачи 31, 32) $Z = 1$, для атома гелия (задача 33) $Z = 2$, для атома лития (задача 34) $Z = 3$; ε_0 – электрическая постоянная [1, с. 120, табл. 1].

Используя условие стационарности электронных орбит (8) и второй закон Ньютона в виде

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2},$$

можно определить радиус r_n электронной орбиты

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{Z\pi me^2} n^2$$

и скорость v_n электрона на этой орбите

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}.$$

Электрон, движущийся в атоме по круговой орбите, имеет кинетическую энергию

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{Z^2 me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

и в результате его взаимодействия с положительно заряженным ядром – потенциальную энергию

$$E_p = -\frac{Z^2 me^4}{4\varepsilon_0{}^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Полная энергия электрона на n-ой орбите равна

$$E_n = E_k + E_p = -\frac{Z^2 me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Из этого выражения видно, что энергия атома *принимает* определенные *квантованные значения*, поэтому схематично энергетический спектр атома можно представить в виде (рис. 3, а).

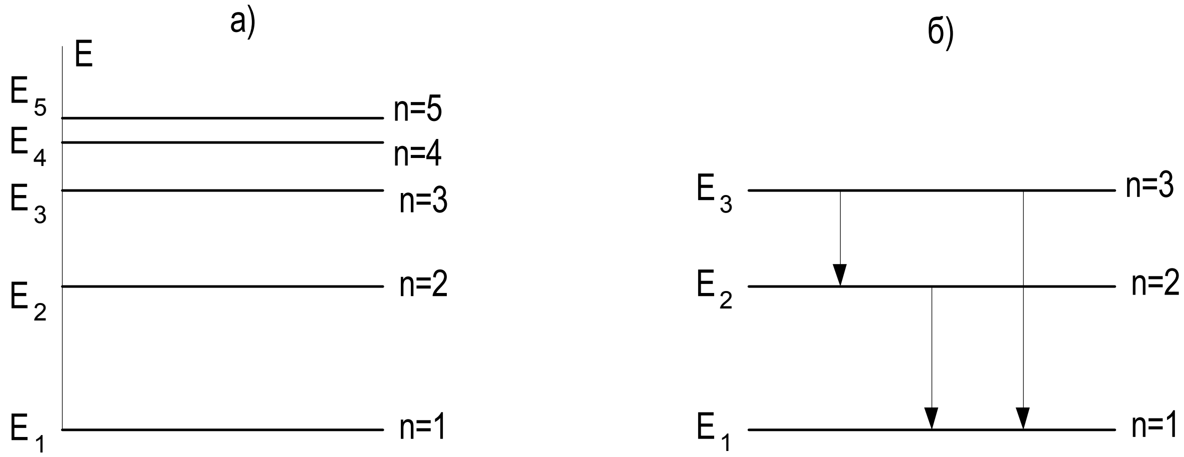

Рис. 3

При переходе электрона с одной орбиты на другую происходит излучение (рис. 3, б) или поглощение кванта энергии

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{Z^2 m e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

Отсюда получаем формулу Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 m e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^3 c} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $R = 1{,}09 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ – постоянная Ридберга;
$n = 1, 2, 3, \ldots, k = n + 1, \ldots$ – целые числа, определяющие номера орбит перехода электрона.

Рентгеновские лучи получают в рентгеновской трубке, в которой между катодом и анодом (антикатодом) создается электрическое поле, ускоряющее электроны. Благодаря этому полю электроны, попадающие на анод, приобретают значительную кинетическую энергию

$$E = eU,$$

где U – напряжение между катодом и анодом; e – заряд электрона.

Спектр рентгеновского излучения (рис. 4) состоит из интенсивных линий λ_1 и λ_2 характеристического излучения и широкого непрерывного спектра, ограниченного в коротковолновой области длиной волны λ_0. При резком торможении электрона часть его кинетической энергии излучается в виде квантов энергии. Предельная энергия кванта соответствует такому случаю торможения, при котором вся кинетическая энергия электрона переходит в энергию кванта электромагнитного излучения

$$h\nu_{\max} = eU.$$

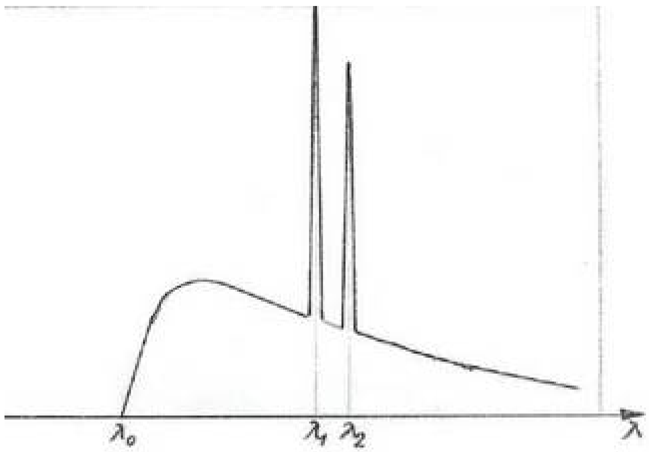

Рис. 4

Тормозное рентгеновское излучение (задача 36) имеет граничную λ_0 длину волны

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{hc}{eU},$$

где U – напряжение между катодом и анодом.

Характеристическое рентгеновское излучение (задачи 37–40) зависит от вещества анода, состоит из спектральных линий, образующих K, L, M, N-серии. В атомах тяжелых элементов K, L, M, N-оболочки заполнены электронами. Для удаления электронов из внутренних слоев необходима большая энергия. K-серия характеристического излучения, например, возникает в результате удаления одного из электронов K-оболочки.

Освободившееся место занимает электрон L-оболочки. В спектре излучения появляется K_α-линия.

Для линий различных серий характеристического излучения применима формула Мозли

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-a)^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),$$

где R – постоянная Ридберга; Z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева; a – постоянная экранирования; m и n – целые числа.

Примечания:

1. В видимой части спектра атома водорода (задача 31) наблюдается серия Бальмера, для которой $Z = 1$, $n = 2$, а $k = 3$, 4, 5, … . Для определения числа линий этой серии необходимо, варьируя k, вычислить минимальную λ_{min} и максимальную λ_{max} длину волны излучения из указанного диапазона.
2. Если атом водорода перевести в возбужденное 3S-состояние (задача 32), то в этом состоянии атом может находиться примерно 10^{-8} с, после чего переходит из состояния с $n = 3$ в состояние с меньшей энергией. При этом возможны переходы (см. рис. 3, б) $3\to2$, $2\to1$, $3\to1$. Суммарная энергия излучения должна быть равной энергии атома водорода в возбужденном состоянии. Длина волны излучения определяется по формуле Бальмера.
3. *Ионизация атома* – это процесс удаления электрона из атома, то есть атом переходит из основного состояния с $n = 1$ в состояние с $n\to\infty$. Потенциал ионизации $\varphi_{ион}$ (задача 34) определится по формуле

$$\varphi_{ион} = \frac{E_{ион}}{e}, \text{ где}$$

$$E_{ион} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{Z^2me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{Z^2hRc}{n^2}.$$

4. Мезоатом – частица, заряд которой равен заряду электрона, а масса $m_м = 207\ m_e$, поэтому постоянная Ридберга для мезоатома (задача 35)

$$R_{м} = \frac{m_{м} e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}.$$

5. В задаче 37 для нахождения λ_{max} принять в формуле Мозли $n = 1$, $m = 2$, а для λ_{min} – $n = 1$, $m = 4$.
6. Для линий *K*-серии постоянная экранирования $a = 1$ (задачи 37, 39).
7. Чтобы определить минимальную разность потенциалов U_{min} (задача 38), необходимо найти границу *K*-серии λ_{min}, соответствующую переходу электрона из *N*-оболочки ($m = 4$) в *K*-оболочку ($n = 1$), а U_{min} рассчитать, используя соотношение

$$\frac{hc}{\lambda_{min}} = eU_{min}\ .$$

8. При переходе электрона из *M*-слоя в *L*-слой постоянная экранирования *a* (задача 40) определяется из условия: $n = 2$, а $m = 3$ (пример 5 [1, с. 102–103]).

Задачи 41–50 на тему «Энергия связи ядер. Дефект массы. Закон радиоактивного распада».

Атомные ядра всех химических элементов *состоят из* элементарных частиц: *протонов и нейтронов*, которые являются двумя зарядовыми состояниями одной частицы – *нуклона.* Протон имеет положительный электрический заряд, равный по абсолютной величине заряду электрона, нейтрон не имеет электрического заряда.

Зарядом ядра называется величина *Ze*, где *e* – величина заряда протона, *Z* – порядковый номер химического элемента в таблице Д. И. Менделеева, равный числу протонов в ядре. Число *A* нуклонов в ядре называется *массовым числом*

$$A = N + Z,$$

где *N* – число нейтронов. Массовое число нуклона (протона или нейтрона) имеет значение, равное 1, электрона – равное нулю. Ядра с одинаковыми *Z*, но различными *A* называются *изотопами.*

Ядро атома химического элемента записывается в виде $^{A}_{Z}X$. Приняты следующие обозначения для некоторых ядер и частиц, встречающихся в задачах данной контрольной работы: протон (ядро атома водорода) ${}_1^1p$ $\left({}_1^1H\right)$; нейтрон ${}_0^1n$; β^--частица (электрон) ${}_{-1}^{0}e$; α-частица (ядро атома гелия) ${}_2^4He$; дейтерий и тритий (изотопы водорода) ${}_1^2H$ и ${}_1^3H$ соответственно.

Нуклоны в ядрах находятся в состояниях, существенно отличающихся от их свободных состояний. За исключением ядра обычного водорода во всех ядрах имеется не менее двух нуклонов, между которыми существует сильное ядерное взаимодействие – притяжение, обеспечивающее устойчивость ядер, несмотря на отталкивание одноименно заряженных протонов.

Энергией связи нуклона в ядре называется физическая величина, равная той работе, которую необходимо совершить, чтобы удалить нуклон из ядра без сообщения ему кинетической энергии. *Энергия связи ядра* определяется величиной работы, которую нужно совершить, чтобы расщепить ядро на составляющие его нуклоны без придания им кинетической энергии. Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра должна выделяться такая же энергия, какую надо затратить при расщеплении ядра на составляющие его нуклоны. Энергия связи ядра является разностью между энергией всех свободных нуклонов, составляющих ядро, и их энергией в ядре.

При образовании ядра происходит уменьшение его массы: масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов. Уменьшение массы ядра объясняется выделением энергии связи. Если $E_{\text{св}}$ – величина энергии, выделяющейся при образовании ядра, то соответствующая ей масса Δm, равная

$$\Delta m = \frac{E_{\text{св}}}{c^2},$$

называется *дефектом массы* и характеризует уменьшение массы ядра в сравнении с массой составляющих его нуклонов. Если ядро массой $M_{\text{я}}$ образовано из Z протонов с массой m_p и из $N = A - Z$ нейтронов с массой m_n, то

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_я.$$

При вычислении дефекта массы Δm массы всех частиц и атомов выражаются в атомных единицах массы (а.е.м.). Массы ядер различных изотопов приведены в [1, с. 122, табл. 19].

Дефект массы служит мерой энергии связи ядра:

$$E_{св} = \Delta mc^2 = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - M_я\right]c^2. \qquad (9)$$

Если энергия выражена в мегаэлектрон-вольтах (МэВ), а масса в атомных единицах массы (а.е.м.), то c^2 = = 931,5 МэВ/(а.е.м.). Тогда соотношение (9) можно переписать в виде

$$E_{св} = 931{,}5\Delta m\,[МэВ],$$

где Δm выражается в атомных единицах массы.

Под *удельной энергией связи ядра* $\varepsilon_{св}$ понимают энергию связи, приходящуюся на один нуклон:

$$\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A}.$$

Радиоактивность – это превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием частиц. Ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется *материнским*, а вновь образующееся ядро – *дочерним.*

Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется *закону радиоактивного распада,* согласно которому за время dt распадается количество dN ядер радиоактивного изотопа

$$dN = -\lambda N dt.$$

Число N ядер, *не распавшихся* к моменту времени t,

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

а число ΔN ядер, *распавшихся* за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right),$$

где N_0 – количество ядер в данном объеме радиоактивного изотопа в начальный момент времени t = 0; e = 2,71… –

основание натурального логарифма; λ – *постоянная радиоактивного распада,* определяющая вероятность распада ядра в единицу времени, которая связана с периодом полураспада $T_{1/2}$:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}$$

и средним временем жизни τ радиоактивного ядра:

$$\lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Период полураспада $T_{1/2}$ – время, в течение которого распадается половина первоначального количества ядер – характеризует их устойчивость. Значения периодов полураспада для различных изотопов приведены в [1, с. 122, табл. 18].

Среднее время жизни τ радиоактивного ядра определяет интервал времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз.

Число N атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе, определяется выражением (см. контрольную работу № 1) [1]

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где m – масса изотопа; M – молярная масса; N_A – постоянная Авогадро ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$).

При радиоактивном распаде выполняются:

1) *закон сохранения электрических зарядов*

$$Z_я e = \sum_i Z_i e, \tag{10}$$

где $Z_я e$ – заряд материнского ядра; $Z_i e$ – заряды ядер и частиц, возникших в результате радиоактивного распада;

2) *закон сохранения массовых чисел*

$$A_я = \sum_i A_i, \tag{11}$$

где $A_я$ – массовое число материнского ядра (ядра или частиц, вступающих в реакцию); A_i – массовое число дочернего ядра (ядра или частиц, образовавшихся в результате радиоактивного распада);

3) *закон сохранения импульса;*

4) *закон сохранения энергии*.

При записи реакции радиоактивного распада материнское (распадающееся) ядро обозначают ${}_Z^A X$, дочернее – Y. Характеристики дочернего ядра (его зарядовое и массовое числа) зависят от типа распада.

Альфа-распадом называется испускание ядрами радиоактивных изотопов α-частиц, которые представляют собой ядра атома гелия ${}_2^4 He$:

$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4} Y + {}_2^4 He + \gamma, \qquad (12)$$

где γ – коротковолновое электромагнитное излучение.

При *бета-распаде* распадающееся ядро испускает электроны (β^--частицы)

$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^{A} Y + {}_{-1}^{0} e + {}_0^0 \tilde{\nu}, \qquad (13)$$

где $\tilde{\nu}$ – антинейтрино (частица с нулевым зарядом и нулевой массой).

Все радиоактивные препараты характеризуются *активностью распада* *a* – числом распадов ядер атомов в единицу времени (задача 50):

$$a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \text{ или}$$

$$a = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = a_0 e^{-\lambda t},$$

где dN – число ядер, распадающихся за интервал времени dt, a_0 – активность изотопа в начальный момент времени.

Примечания:

1. Решая задачи 41–45, воспользуйтесь примером 6 [1, с. 103].
2. При решении задачи 46 используйте закон сохранения массовых чисел и закон сохранения электрических зарядов.
3. Перед решением задач 47–50 разберите пример 7 [1, с. 104].

Задачи 51–60 на тему «Поглощение радиоактивного излучения. Энергия ядерных реакций».

При прохождении узкого пучка монохроматического γ-излучения через слой вещества толщиной x интенсивность излучения уменьшается по закону Бугера–Ламберта (см. контрольную работу № 3) [1]

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где I – интенсивность излучения, вышедшего из слоя вещества толщиной x; I_0 – интенсивность излучения, падающего на слой; μ – линейный коэффициент ослабления излучения веществом. Зависимость коэффициента ослабления μ для различных веществ от энергии γ-кванта представлена на рис. 8 [1, с. 105].

Ядерной реакцией называется процесс сильного взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер). Наиболее распространенным видом ядерной реакции является взаимодействие легкой частицы a с ядром X, в результате которого образуется легкая частица b и ядро Y:

$$X + a \rightarrow Y + b.$$

Уравнение таких реакций принято записывать сокращенно в виде

$$X\,(a\,,b\,)\,Y\,.$$

В скобках указываются участвующие в реакции легкие частицы, сначала исходная, затем конечная. В качестве легких частиц a и b могут фигурировать нейтрон (n), протон (p), дейтрон (дейтерий) (d), α-частица (α) и γ-квант (γ).

При ядерных реакциях, также как и при радиоактивном распаде, выполняются законы:

1) закон сохранения электрического заряда (10): алгебраическая сумма зарядовых чисел ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, должна быть равна алгебраической сумме зарядовых чисел конечных продуктов реакции;

2) закон сохранения массовых чисел (11): сумма массовых чисел исходных продуктов ядерной реакции должна быть равна сумме массовых чисел конечных продуктов реакции;
3) закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const};$$

4) закон сохранения энергии

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \text{const}.$$

Ядерные реакции могут сопровождаться выделением (экзотермические), или поглощением (эндотермические) энергии. Энергия реакции определяется по формуле

$$Q = \Delta m c^2,$$

где $\Delta m = M_{\text{исх}} - M_{\text{кон}}$ – *дефект массы ядерной реакции.*

При отрицательном дефекте массы $\Delta m < 0$ для осуществления ядерной реакции требуется подвод энергии извне, при $\Delta m > 0$ в результате ядерной реакции будет выделяться энергия (кинетическая, тепловая, энергия электромагнитного излучения).

Если Δm выразить в атомных единицах массы (а.е.м.), то для определения энергии реакции можно воспользоваться соотношением

$$Q = 931{,}5\Delta m\,[\text{МэВ}].$$

Примечания:
1. Перед решением задач 51–54 разберите пример 8 [1, с. 104].
2. Перед решением задач 55, 57–59 обратите внимание на пример 9 [1, с. 105–106].
3. Вместо задачи 60 решите задачу 58.
4. Вместо задачи 56 решите задачу 57.

<u>Задачи 61–70</u> на тему «Элементы теории твердого тела».

Твердые тела, в отличие от газов и жидкостей, характеризуются значительными силами межмолекулярного взаимодействия, они сохраняют объем и форму. Правильная геометрическая форма монокристаллов обусловлена упорядоченным расположением его частиц в узлах кристаллической решетки. *Узлы кристаллической решетки* – средние равновесные положения, около которых колеблются частицы. В зависимости от рода частиц и характера сил взаимодействия между ними кристаллы подразделяют на ионные, атомные, металлические и молекулярные.

Пространственная периодичность расположения частиц определяет семь *сингоний* (кристаллографических систем). Повторяющееся размещение частиц в кристалле описывают с помощью *трансляции* или параллельного перемещения. Решетка, построенная путем трансляции узла по трем направлениям, называется *решеткой Браве*. Элементарная кристаллическая решетка представляет собой параллелепипед, построенный на ребрах a, b, c с углами α, β, γ между ребрами. Объем элементарной кубической ячейки

$$V = a^3.$$

Число атомов n в единице объема, расстояние d между ближайшими соседними частицами приведены в [1, с. 106]. Примените эти данные при решении задач 61–66.

В задачах 67, 68 обсуждается распределение электронов в металле по квантовым состояниям. Электроны проводимости в металле, не связанные с конкретным атомом, обобществлены и слабо взаимодействуют с совокупностью всех атомов, их называют *электронным газом*. Число свободных электронов полагают равным числу атомов. Распределение электронов по энергиям характеризуется функцией Ферми–Дирака

$$f(E,T) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/kT}}, \tag{14}$$

где E – энергия электрона; E_F – *энергия Ферми* (максимальная энергия электронов в зоне проводимости при 0 K). Функция (14) определяет вероятность того, что при данной температуре T состояние, соответствующее энергии E, будет занято электроном.

Для электронов в металле вероятность заселенности квантового состояния и среднее число частиц в данном квантовом состоянии совпадают. Распределение электронов по различным квантовым состояниям подчиняется *принципу Паули*: *в одном квантовом состоянии не может быть двух электронов с одинаковым набором четырех квантовых чисел*. Следовательно, электроны в металле последовательно заполняют энергетические уровни, начиная с самого нижнего энергетического уровня.

Функция распределения электронов по состояниям определяет среднее число $<N_i>$ электронов в квантовом состоянии с энергией E_i

$$f(E,T) = \frac{2}{1 + e^{(E - E_F)/kT}}. \qquad (15)$$

Анализируя (15), получаем число свободных электронов в металле (рис. 5, а), занимающих уровень с энергией E_i при $T = 0$ К: $<N_i> = 2$, если $E_i < E_F$, и $<N_i> = 0$, если $E_i > E_F$.

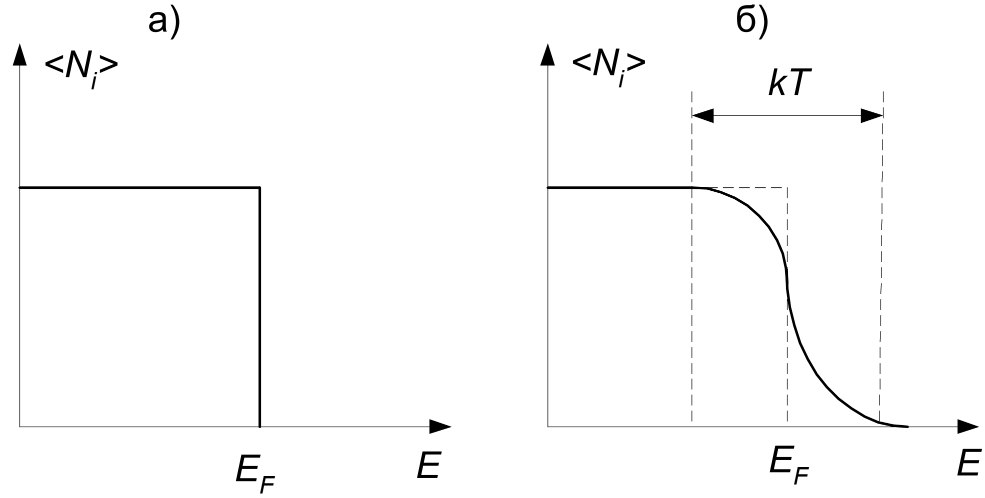

Рис. 5

При $E_i = E_F$ функция распределения электронов по состояниям скачкообразно изменяется до нуля, то есть при $T = 0$ К все нижние состояния заполнены электронами. При температуре $T > 0$ К функция распределения среднего числа свободных электронов в металле по энергиям в окрестности E_F изменяется плавно (рис. 5, б). Ширина области ее изменения порядка «kT». Причина изменения вида функции –

взаимодействие электрона с атомом, участвующим в тепловом движении.

В задачах 69, 70 используется понятие *«фонон в кристалле»*. Точное описание тепловых колебаний частиц в твердых телах очень сложно, поэтому для упрощения используют гармоническое приближение, согласно которому малое смещение частиц пропорционально упругой силе**.** Для N частиц в кристалле необходимо составить и решить систему $3N$ уравнений в соответствии с $3N$ степенями свободы частиц, что практически невозможно.

Поэтому рассматривают коллективное движение в кристалле, которое возбуждается в форме волны, охватывающей все его части. Такое коллективное движение называется *нормальным колебанием* или *нормальной модой*. В трехмерном кристалле объемом V возникнет n стоячих волн (см. контрольную работу № 3) [1] с длиной волны λ

$$n = \frac{4\pi V}{\lambda^3},$$

где λ – длина волны нормальных колебаний. Использование связи длины волны λ с частотой ν колебаний и скоростью v их распространения

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

приводит к зависимости

$$n = \frac{4\pi V \nu^3}{v^3}.$$

Дифференцируя полученное выражение по частоте, определяют число нормальных мод, заключенное интервале частот от ν до ν + *d*ν,

$$dn = \frac{12\pi V \nu^2}{v^3} d\nu.$$

Частотный спектр этих колебаний (плотность заполнения спектрального участка нормальными модами) называют *функцией распределения нормальных мод*

$$g(\nu) = \frac{dn}{d\nu} = \frac{12\pi V \nu^2}{v^3}. \tag{16}$$

Спектр нормальных мод решеток Браве ограничивается $3N$ акустическими колебаниями. Следовательно, условие нормировки функции (14)

$$\int_0^{\nu_m} g(\nu) d\nu = 3N, \tag{17}$$

где ν_m – максимальная частота, ограничивающая спектр нормальных колебаний сверху, зависит от упругих свойств твердого тела. Решение уравнений (16) и (17) позволяет определить характеристическую частоту ν_m Дебая:

$$\nu_m = \left(\frac{3Nv^3}{12\pi V} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Энергия нормальных колебаний решетки квантуется. Минимальную порцию или квант энергии $\varepsilon = h\nu$ таких колебаний называют фононом**.** *Фононы* – квазичастицы, которые используют для описания волновых движений упорядоченного коллектива частиц. Они не взаимодействуют друг с другом. В динамическом отношении кристалл рассматривают как идеальный газ фононов. Среднее число $\langle N \rangle$ фононов, обладающих энергией $h\nu$**,** равно отношению средней энергии $\langle \varepsilon \rangle$ осциллятора к энергии ε фонона:

$$\langle N \rangle = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\varepsilon}.$$

Согласно гипотезе Планка (1900 г.) средняя энергия квантового осциллятора в условиях теплового равновесия

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Следовательно, среднее число фононов <N>, обладающих энергией $h\nu$, равно

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Энергию фонона ε_i, соответствующую максимальной частоте ν_m, ограничивающей спектр нормальных колебаний сверху, принято выражать через температуру Θ_D – характеристическую температуру Дебая

$$\varepsilon_i = h\nu_m = k\Theta_D.$$

Используя понятие *температуры Дебая* – температуры, при которой частота колебаний ионов в узлах кристаллической решетки максимальна, получим выражение для среднего числа фононов с частотой ν_m:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^{\Theta_D/T} - 1}.$$

Пример 2. Определить вероятность того, что электрон при комнатной температуре займет состояния, лежащие на 0,1 эВ выше и на 0,1 эВ ниже уровня Ферми.

T=300 К
ΔE = 0,1 эВ
$f(E, T)$ – ?

Решение.

Вероятность того, что при температуре T состояние, соответствующее энергии E, будет занято электроном, определяется функцией (14)

$$f(E,T) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}}.$$

Если $E - E_F$ = 0,1 эВ, то $E - E_F/kT$ = 0,1/0,025 = 4, так как

$$1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300/1{,}6 \cdot 10^{-19} = 0{,}025 \text{ (эВ)}.$$

Тогда вероятность заполнения электронами состояния с энергией E

$$f(E,T) = \frac{1}{e^4 + 1} = 0{,}018 \approx 0{,}02.$$

Если $E - E_F = -0{,}1$ эВ, то $E - E_F /kT = -4$ и, следовательно, вероятность заполнения электроном данного состояния

$$f(E,T) = \frac{1}{e^{-4} + 1} = 0{,}98.$$

Примечания:

1. Перед решением задач 61–66 разберите пример 10 [1, с. 106–107].
2. Для решения задачи 63 по таблице Менделеева найдите относительные атомные массы *Na* и *Cl* (массой электрона, недостающего в ионе натрия и лишнего в ионе хлора, можно пренебречь).
3. При решении задачи 67 в уравнение (15) необходимо подставить $E_i=E_F$.
4. Перед решением задачи 68 разберите пример 2 (с. 25–26 данных методических указаний) и дополнительно используйте уравнение (15).
5. Перед решением задач 69 и 70 разберите пример 12 [1, с.107–108].
6. Для определения отношения среднего числа $\langle N_i \rangle$ фононов в кристалле с энергией $\varepsilon_i=\varepsilon_m/2$ к среднему числу $\langle N \rangle$ фононов с максимальной энергией (задача 70) учтите, что максимальная энергия ε_m фононов определяется температурой Θ_D (температурой Дебая) кристалла.

Задачи 71–80 на тему «Теплоемкость твердых тел. Примесная проводимость полупроводников».

В соответствии с классическими представлениями кристалл является системой с $3N$ колебательными степенями свободы (N – число ионов в кристалле), на каждую из которых приходится в среднем энергия kT (k – постоянная Больцмана). Из этих представлений вытекает *закон Дюлонга и Пти*, согласно которому молярная теплоемкость всех химически простых веществ в кристаллическом состоянии одинакова

$$C_V = 3R, \tag{18}$$

где R = 8,31 Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная. Этот закон достаточно хорошо выполняется при температурах $T >> \Theta_D$ (с. 22–25 данных методических указаний).

В области низких температур ($T << \Theta_D$) молярная теплоемкость имеет вид

$$C_V = \frac{12\pi^3}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 = 234 R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \qquad (19)$$

Формула (19) используется при решении задач 71–76, если температура $T << \Theta_D$, а формула (18), если $T >> \Theta_D$.

Проводимость полупроводников (задачи 77–80), обусловленная примесями, называется *примесной проводимостью*. В полупроводниках с примесью, валентность которой на единицу больше валентности основных атомов, основными носителями тока являются электроны. Такая проводимость называется *электронной проводимостью*. Введение примеси, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, приводит к *дырочной проводимости*. Основными носителями тока в этом случае являются дырки. Примесная электропроводность полупроводников определяется по формуле

$$\gamma = e\left(n_- b_- + n_+ b_+\right), \qquad (20)$$

где n_- и n_+ – концентрация электронов и дырок; b_- и b_+ – подвижность электронов и дырок соответственно.

Для определения знака носителей тока в полупроводниках нужно знать валентность атомов примеси и атомов основного элемента. Для атомов основного элемента с валентностью, равной 4 (алмаз, германий, кремний), атомы трехвалентных бора (B) и индия (In) будут являться поставщиками дырок, а элементы $\overline{\underline{\mathrm{V}}}$-ой группы – сурьма ($Sb$) и мышьяк ($As$) – поставщиками электронов.

Примечания:

1. Вычисляя молярные теплоемкости вещества (задачи 71, 75), используйте пояснения примера 11 [1, с. 107].

2. Для определения удельной теплоемкости (задачи 72, 76) воспользуйтесь связью между молярной C_V и удельной c теплоемкостью

$$C_V = Mc,$$

где M – молярная масса вещества.
3. При решении задачи 71 необходимо сначала определить молярную теплоемкость C'_V по формуле (18) и сравнить полученное значение с заданным значением теплоемкости в условии задачи. Если $C_V < C'_V$, то $T << \Theta_D$. Тогда температура селена определяется из формулы (19).
4. При изменении температуры на dT количество теплоты, необходимое для нагревания металла (задачи 73, 74), можно рассчитать по формуле

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_V dT,$$

где m/M – количество молей вещества. Если температура изменяется от T_1 до T_2, то

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M} C_V \, dT,$$

где C_V определяется выражением (19).
5. Вычисление примесной электропроводности полупроводников (задачи 77–80) по формуле (20) не вызовет затруднений, если правильно определить тип основных носителей тока.

Список рекомендуемой литературы

1. Физика. Программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических и технологических специальностей вузов / под ред. В. Ф. Дмитриевой. – М.: Высш. шк., 2005. – 126 с.
2. Трофимова Т. И. Курс физики. – М. : Академия, 2007. – 560 с.
3. Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высш. шк., 2006. – 718 с.
4. Савельев И. В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. Т. 3. Квантовая оптика, атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – СПб. : Лань, 2007. – 320 с.

Составители

Татьяна Александровна Балашова
Нина Николаевна Демидова
Таисия Васильевна Лавряшина

ФИЗИКА

Методические указания по выполнению контрольной работы № 4
для студентов заочной формы обучения
по курсу общей физики для всех специальностей

Рецензент Н. Б. Окушко

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 07.12.2007. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Уч.-изд. л. 1,7.
Тираж 380 экз. Заказ
ГУ КузГТУ. 650026, Кемерово, ул. Весенняя, 28.
Типография ГУ КузГТУ. 650099, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А.